数理解析研究所講究録 1375 巻 2004 年 144-150

Multi-modal logics における Shannon の標準形展開の自然な拡張

椙山女学園大学　大芝　猛(Takeshi OSHIBA)
Sugiyama Jyogakuen University

命題論理における最小項による主和標準形展開と妥当性検証の表現を multi-modal logics の場合に自然に拡張する。

[0]　命題論理 PL_0 において、高々m変数$\{p_1,\ldots,p_m\}$をもつ論理式 $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}$ に対し、m変数最小項の集合${}^{(m)}w[A]=\{f_1,\ldots,f_d\}$(A の展開集合)がきまり、その論理的意味＊:選言和に関して、

$\boxed{1}$　$PL_0\vdash A\equiv f_1\vee\cdots\vee f_d(={*}^{(m)}w[A]$とかく$)$…主和標準形展開(Shannon の定理から)が成立.

o　ここでm変数最小項は$p_1^{\delta 1}\wedge\cdots\wedge p_m^{\delta m}$なる形の変数リテラル$p_j^{\delta j}$ m個の∧積であり、その全体を${}^{(m)}W$とかく. また、p_j^{1}, p_j^{0}. の論理的意味は、それぞれ　p_j, $\neg p_j$である.

$\boxed{2}$　またすべての m 変数最小項の選言和${*}^{(m)}W\,(=\bigvee_{\xi_1,\ldots,\xi_m\in\{0,1\}} p_1^{\xi 1}\wedge\cdots\wedge p_m^{\xi m})$がトートロジーであること：$PL_0\vdash{*}^{(m)}W$が示される.

$\boxed{3}$　更に決定手続きについて、次の性質が有効である.

$PL_0\vdash A \;\Leftrightarrow\; {}^{(m)}w[A]={}^{(m)}W$　(「A の展開集合が、全最小項の集合と<u>集合として一致</u>」の確認)

o　また、${}^{(1)}\mathcal{L}\subset{}^{(2)}\mathcal{L}\subset{}^{(3)}\mathcal{L}\subset\cdots$であるが、各 m(≧1)に対応する ${}^{(m)}\mathcal{L}$ の論理式の展開基底(base) ${}^{(m)}W$の列：${}^{(1)}W$, ${}^{(2)}W$, ${}^{(3)}W$, …が必要である. [${}^{(m)}W\cap{}^{(m')}W=\varnothing$　$(m\neq m')$]

[I]　multi-modal logics の論理式の階層<u>${}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$</u> (m＝1,2,… ; k＝0,1, …)と展開構造

[1] 論理式に使用する modal 記号は高々$\{K_1,\ldots,K_n\}$($\{\Box_1,\ldots,\Box_n\}$)と n を固定し(例えば n=4)、その上で高々m変数$\{p_1,\ldots,p_m\}$を含み、modal 記号 nesting の最大適用 k 重をもつ(k-degree)論理式全体を<u>${}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$</u>とかく. (例えば、m=5, k=2 の論理式は$A=p_2\vee K_3((K_1(p_1\vee\neg p_5))\wedge K_4(p_3))\in{}^{(5)}\mathcal{L}^{(2)}$)

o　これらに対応し、展開の基底(base)も二重列：${}^{(m)}W^{(k)}$(m＝1,2,… ; k＝0,1, …)が必要である.

[2] 様々な multi-modal 論理 (拡張された normal 論理を含む)での論理式の標準形展開を与えるため、†)「各 m≧1 に対し、<u>${}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$(k＝0,1, …)の上の標準形展開基底-写像系：</u>
<u>$\langle {}^{(m)}W^{(k)}\,(k=0,1,\ldots),\ {}^{(m)}w,\ *\rangle$</u>を以下に定義する.」

(Definition.1) 各 m≧1 に対し、degree k の拡張最小項の集合${}^{(m)}W^{(k)}$を k-帰納的に定義する.

(1) ${}^{(m)}W^{(0)}=\{p_1^{\xi 1}\cdot\cdots\cdot p_m^{\xi m}\mid \xi_1,\ldots,\xi_m\in\{0,1\}\}(={}^{(m)}W)$,　(ただし·の論理的意味は∧)

$$\text{(2)}\quad {}^{(m)}W^{(k+1)}=\left\{\left\langle x,\begin{pmatrix} K_1[S_1]^{\xi 11}\cdot\cdots\cdot K_1[S_{N(m,k)}]^{\xi 1N(m,k)}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ K_n[S_1]^{\xi n1}\cdot\cdots\cdot K_n[S_{N(m,k)}]^{\xi nN(m,k)}\end{pmatrix}\right\rangle \;\middle|\; x\in{}^{(m)}W^{(k)},\ \xi ij\in\{0,1\}\ \begin{pmatrix}1\leqq i\leqq n,\\ 1\leqq j\leqq N(m,k)\end{pmatrix}\right\}(k\geqq 0)$$

但し、$2^{{}^{(m)}W^{(k)}}=\{S_1,\ldots,S_{N(m,k)}\}$, $(N(m,k)=2^{|{}^{(m)}W^{(k)}|}$, $S_1=\varnothing$, $S_{N(m,k)}={}^{(m)}W^{(k)})$, [${}^{(m)}W^{(k)}\cap{}^{(m')}W^{(k')}=\varnothing$, $(m,k)\neq(m',k')$]

[註]†)n 固定を除き、m≧1, ${}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$, ${}^{(m)}W^{(k)}$, ${}^{(m)}w$ を一般化し、n,m≧1, ${}^{(n,m)}\mathcal{L}^{(k)}$, ${}^{(n,m)}W^{(k)}$, ${}^{(n,m)}w$としうる.

o $^{(m)}W^{(k+1)}$の要素を rank m, degree k+1 の最小項とよぶ. また $n\times N(m,k)$ matrix の各要素 $K_i[S_j]^{\xi ij}$を rank m, degree k+1 のリテラルとよぶ.

(Definition 2) 最小項またはその集合から論理式への写像 $\underline{*: 2^{^{(m)}W^{(k)}} \to {}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)} \cup \{\perp\}}$ $(m\geqq 1, k\geqq 0)$

(1) $S=\{f_1,\cdots,f_r\}\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$ に対し、$*S=*f_1\vee\cdots\vee *f_r$ $(r\geq 1)$ (2) $S=\emptyset$ に対し、$*\emptyset=\perp$

(3) $f=p_1^{\delta 1}\cdot\cdots\cdot p_m^{\delta m}\in {}^{(m)}W^{(0)}$に対し、 $*f={}^{\delta 1}p_1\wedge\cdots\wedge{}^{\delta m}p_m\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(0)}$, ただし、

(Notation D2-1) 一般に論理式 A に対し、記法: $\boxed{{}^{\delta}(A)=A\ (\delta=1),\ \neg A\ (\delta=0)}$ を用いる.

(4) $f=\ <g,\ \begin{pmatrix} K_1[S_1]^{\delta 11}\cdot\cdots\cdot K_1[S_{N(m,k)}]^{\delta 1N(m,k)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ K_n[S_1]^{\delta n1}\cdot\cdots\cdot K_n[S_{N(m,k)}]^{\delta nN(m,k)} \end{pmatrix}>\in{}^{(m)}W^{(k+1)}$, $g\in{}^{(m)}W^{(k)}$, $\delta ij\in\{0,1\}(1\leqq i\leqq n,$ $1\leqq j\leqq N(m,k))$,に対して、

$$*f = *g\wedge{}^{\delta_{11}}(K_1(*(S_1)^{(m,k)}))\wedge\cdots\wedge{}^{\delta_{1N(m,k)}}(K_1(*(S_{N(m,k)})^{(m,k)}))$$
$$\wedge\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\wedge{}^{\delta_{n1}}(K_n(*(S_1)^{(m,k)}))\wedge\cdots\wedge{}^{\delta_{nN(m,k)}}(K_n(*(S_{N(m,k)})^{(m,k)}))\quad (\cdots\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k+1)})$$

(5) ただし $S\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}$ に対し、$S\neq\emptyset$ のとき, $\boxed{*(S)^{(m,k)}=*S \qquad (\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)})}$;

$S=\emptyset$ のときは, $\boxed{*(\emptyset)^{(m,k)}=\perp\wedge *{}^{(m)}W^{(k)}(\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)})}$と定義する.

[Proposition 0] (1) $S\subseteq{}^{(m)}W^{(k)} \Rightarrow \deg(*(S)^{(m,k)})=k$

(2) 拡張された命題論理 PL で、 $S\subseteq{}^{(m)}W^{(k)} \Rightarrow PL\vdash *(S)^{(m,k)}\equiv *S$.

(Definition3) (1) $U\subseteq{}^{(m)}W^{(d)}$の、${}^{(m)}W^{(d+1)}$の中への mapping U' :

$$\underline{U'}=\left\{<x,\ \begin{pmatrix} K_1[S_1]^{\xi 11}\cdot\cdots\cdot K_1[S_{N(m,k)}]^{\xi 1N(m,k)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ K_n[S_1]^{\xi n1}\cdot\cdots\cdot K_n[S_{N(m,k)}]^{\xi nN(m,k)} \end{pmatrix}>\ \middle|\ x\in U,\ \xi ij\in\{0,1\}\ (1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq N(m,k))\right\}$$

(2) $d\leqq k$ なる k に対して、 $\underline{U^{(k)}=U^{\overset{k-d}{'\cdots'}}}$.

(Definition4) 各 m≧1 に対する、論理式から最小項集合への写像 $\underline{{}^{(m)}w}:\underline{{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}\to 2^{^{(m)}W^{(k)}}}$ $(k\geqq 0)$

[論理式 $A(\in\bigcup_{k\geqq 0}{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)})$の構成に関する帰納法による定義].

(1)(i) ${}^{(m)}w[\perp]=\emptyset$. (ii) ${}^{(m)}w[p_i]=\{p_1^{\xi 1}\cdot\cdots\cdot p_{i-1}^{\xi i-1}\cdot p_i^1\cdot p_{i+1}^{\xi i+1}\cdot\cdots\cdot p_m^{\xi m}\mid \xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_m\in\{0,1\}\}$

(2) $A=B\vee C\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して、 ${}^{(m)}w[B\vee C]={}^{(m)}w[B]^{(k)}\cup{}^{(m)}w[C]^{(k)}$

(3) $A=B\wedge C\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して、 ${}^{(m)}w[B\wedge C]={}^{(m)}w[B]^{(k)}\cap{}^{(m)}w[C]^{(k)}$

(4) $A=\neg B\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して、${}^{(m)}w[\neg B]={}^{(m)}W^{(k)}-{}^{(m)}w[B]$

(5) $A=B\supset C\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して、 ${}^{(m)}w[B\supset C]=({}^{(m)}W^{(k)}-{}^{(m)}w[B]^{(k)})\cup{}^{(m)}w[C]^{(k)}$

(6) $A=K_i(B)\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$, $k\geq 1$ に対して、${}^{(m)}w[B]=S_d$(S_dが $2^{^{(m)}W^{(k-1)}}$ の中の d 番目の集合)ならば、

$${}^{(m)}w[K_i(B)]=\left\{<x,\ \begin{pmatrix} K_1[S_1]^{\xi 11}\cdots\cdots\cdots\cdot K_1[S_{N(m,k-1)}]^{\xi 1N(m,k-1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Ki[S1]^{\xi i1}\cdot\cdots\cdots\cdot Ki[S_d]^1\cdot\cdots\cdot Ki[S_{N(m,k-1)}]^{\xi iN(m,k-1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ K_n[S_1]^{\xi n1}\cdots\cdots\cdots\cdot K_n[S_{N(m,k-1)}]^{\xi nN(m,k-1)} \end{pmatrix}>\ \middle|\ x\in{}^{(m)}W^{(k-1)},\ \xi_{11},\ldots\xi_{id-1},\xi_{id+1},\ldots,\xi_{nN(m,k-1)}\in\{0,1\}\right\}$$

[註] $\boxed{*{}^{(m)}\underline{w[A]}}$は$(\{p_1,\ldots,p_m\}\cup\bigcup_{0\leqq d\leqq k-1}\bigcup_{1\leqq i\leqq n\&,1\leqq j\leqq N(m,d)}\{Ki(*(Sj)^{(m,d)})\})\to\{0,1\}$の意味で<u>Aの拡張論理関数</u>といえる[$m+\Sigma_{0\leqq d\leqq k-1}(n\times N(m,d))$)個のリテラル的な変数をもつ]. 後述 Theorem 5 参照.

[Theorem 1] 任意の $U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$, に対して、${}^{(m)}w[*U] = U$ $(m \geqq 1, k \geqq 0)$ [${}^{(m)}w$ は$*$の inverse mapping となる.] (proof)は Appendix

[Proposition 2] PL が拡張された命題論理[$\mathcal{L}(=\cup_{m \geq 1} \cup_{k \geq 0} {}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)})$のトートロジー代入形全体]のとき、容易に次が示される:

(1) $f, g \in {}^{(m)}W^{(k)}, f \neq g \Rightarrow PL \vdash *f \wedge *g \equiv \perp$

(2) $U, V \in {}^{(m)}W^{(k)}, U \cap V = \varnothing \Rightarrow PL \vdash *U \wedge *V \equiv \perp$

(3) $U, V \in {}^{(m)}W^{(k)} \Rightarrow PL \vdash *(U \cup V) \equiv *U \vee *V$

(4) $U, V \in {}^{(m)}W^{(k)} \Rightarrow PL \vdash *(U \cap V) \equiv *U \wedge *V$

(5) $U, V \in {}^{(m)}W^{(k)}, U \subseteq V \Rightarrow PL \vdash *U \supset *V$.

[Theorem 3] $PL \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$. $(m \geqq 1, k \geqq 0)$ (命題論理の性質$\boxed{2}$に対応する)

(Proof) 任意の $m \geqq 1$ に対して、「$PL \vdash *{}^{(m)}W^{(k)}$ $(k \geqq 0)$」を k に関する帰納法で示す.

(初期 step) $*{}^{(m)}W^{(0)}$は狭義命題論理の m 変数最小項全体の選言和なので、成立.

(帰納 step) PL の中で次が成立する.

$$*{}^{(m)}W^{(k+1)} = \bigvee_{y \in {}^{(m)}W^{(k)}} \bigvee_{\xi_{11} \in \{0,1\}} \cdots \bigvee_{\xi_{ij} \in \{0,1\}} \cdots \bigvee_{\xi_{nN(m,k)} \in \{0,1\}}$$
$$(*y \wedge {}^{\xi_{11}}(K_1(*(S_1)^{(m,k)})) \wedge \cdots \wedge {}^{\xi_{ij}}(K_i(*(S_j)^{(m,k)})) \wedge \cdots\cdots \wedge {}^{\xi_{nN(m,k)}}(K_n(*(S_{N(m,k)})^{(m,k)})))$$
$$\equiv (\bigvee_{y \in {}^{(m)}W^{(k)}} *y) \wedge (\bigvee_{\xi_{11} \in \{0,1\}} {}^{\xi_{11}}(K_1(*(S_1)^{(m,k)}))) \wedge \cdots \wedge (\bigvee_{\xi_{ij} \in \{0,1\}} {}^{\xi_{ij}}(K_i(*(S_j)^{(m,k)}))) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (\bigvee_{\xi_{nN(m,k)} \in \{0,1\}} {}^{\xi_{nN(m,k)}}(K_n(*(S_{N(m,k)})^{(m,k)})))$$

$\wedge$結合の第２式以下はいずれも$B \vee \neg B$ form でトートロジーなので、

$PL \vdash *{}^{(m)}W^{(k+1)} \equiv (\bigvee_{y \in {}^{(m)}W^{(k)}} *y) \equiv *{}^{(m)}W^{(k)}$. 故に帰納法の仮定から $PL \vdash *{}^{(m)}W^{(k+1)}$.

[Proposition 4] 任意の $U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$, に対して、$PL \vdash *(U') \equiv *U$. $(m \geqq 1, k \geqq 0)$

(Proof) 前定理の証明の${}^{(m)}W^{(k+1)}$, ${}^{(m)}W^{(k)}$ を、それぞれ U', U に置き換えればよい.

[II] 拡張された展開定理

(Definition 5) PL(拡張された命題論理)に次の様相 rule または様相 axiom を追加した multi-modal 論理を定義する. 次いでこれらの論理関連での展開定理を提示する.

K_0 : PL＋modus ponense＋{ $\dfrac{\varphi}{Ki(\varphi)}$ $| \varphi \in \mathcal{L}$ $(1 \leq i \leq n)$}. 但し、$\mathcal{L} = \cup_{m \geq 1} \cup_{k \geq 0} {}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ とする.

$K_1 = K_0 + \{ \dfrac{\varphi \supset \psi}{Ki(\varphi) \supset Ki(\psi)}$ $| \varphi, \psi \in \mathcal{L}$, $\underline{deg(\varphi) = deg(\psi)}$ $(1 \leq i \leq n) \}$

を <u>同次制限-準 normal logic</u> と呼ぶ.

$K^{\sim} = K_0 +$ $\{Ki(\varphi \supset \psi) \supset (Ki(\varphi) \supset Ki(\psi)) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{L}$, $\underline{deg(\varphi) = deg(\psi)}$ $(1 \leq i \leq n)\}$ を<u>同次制限-normal logic</u> と呼ぶ. 次の K に対し、$L \geqslant K$ なる論理 L は(拡張)normal logic である.

$K = K_0 + \{Ki(\varphi \supset \psi) \supset (Ki(\varphi) \supset Ki(\psi)) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{L}, (1 \leq i \leq n)\}$ は (拡張)最小 normal logic である.

$PL < K_0 < K_1 < K^{\sim} < K$ の成立を確かめることができる。

[Theorem 5] $L \geqslant K_1$ なる論理 L において、任意の論理式 $A \in {}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して,

$L \vdash *({}^{(m)}w[A]) \equiv A$ $(m \geqq 1, k \geqq 0)$ (命題論理の性質$\boxed{1}$に対応する)

(Proof) $L = K_1$(同次制限-準 normal logic)の場合を. A の構成に関する帰納法により示す.

(1) 初期 cases (i) $A=\perp$ のとき. ${}^{*(m)}w[\perp]={}^{*}(\varnothing)=\perp$. (ii) $A=p_i$のとき. 命題論理と同様.

(2) 帰納的 cases : $A=\ B\vee C,\ \ B\wedge C,\ \ \neg B,\ \ B\supset C\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ のとき.

mapping ${}^{(m)}w$, $*$ の定義および Proposition 4, Theorem 3 を用い PL で次が導かれる.

(iii) ${}^{*(m)}w[B\vee C]$ (iv) ${}^{*(m)}w[B\wedge C]$ (v) ${}^{*(m)}w[\neg B]$ (vi) $B\supset C$

$\equiv {}^{*(m)}w[B]\vee{}^{*(m)}w[C]$ $\equiv {}^{*(m)}w[B]\wedge{}^{*(m)}w[C]$ $\equiv\neg\,{}^{*(m)}w[B]$ $\equiv {}^{*(m)}w[B]\supset{}^{*(m)}w[C]$

従って、帰納法の仮定を用いて、それぞれの場合 K_1 の中で、次が示される.

${}^{*(m)}w[B\vee C]\equiv B\vee C$, ${}^{*(m)}w[B\wedge C]\equiv B\wedge C$, ${}^{*(m)}w[\neg B]\equiv\neg B$, ${}^{*(m)}w[B\supset C]\equiv B\supset C$.

(vii) $A=Ki(B)\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}, k\geq 1$ のとき. ${}^{(m)}w[B]=Sd\,(\subseteq{}^{(m)}W^{(k-1)})$ とする.

${}^{*(m)}w[Ki(B)]$に、Theorem 3 の証明と同様な方法を適用すれば、${}^{(m)}w[Ki(B)]$ 内 matrix 部分のすべてのリテラルのうち、$Ki[Sd]^1\,(=Ki[{}^{(m)}w[B]]^1)$ 以外は $*$操作でトートロジーとなり消去され、 PL $\vdash{}^{*(m)}w[Ki(B)]\equiv Ki({}^{*}({}^{(m)}w[B])^{(m,k-1)})$…① を得る. 一方 Prop.0(2)から、PL $\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[B])^{(m,k-1)}\equiv{}^{*}({}^{(m)}w[B])$. 故に、帰納法の仮定から、$K_1\vdash{}^{*}({}^{(m)}(w[B])^{(m,k-1)})\equiv B$. また、Prop.0(1)から、$deg({}^{*}({}^{(m)}(w[B])^{(m,k-1)}))=k-1=deg(B)$.

故に、K_1 固有の推論: 条件 ($deg(\varphi)=deg(\psi)$)付の $\dfrac{\varphi\supset\psi}{Ki(\varphi)\supset Ki(\psi)}$ により、

$K_1\vdash Ki({}^{*}({}^{(m)}w[B])^{(m,k-1)}))\equiv Ki(B)$. …②. ①,② から、$K_1\vdash{}^{*(m)}w[K_i(B)]\equiv Ki(B)$.

[III] multi-modal logic の特性集合と決定問題

(Definition 6) logic L に対し、次の集合(列)をLの特性集合(列)という :

${}^{(m)}W^{(k)}{}_L=\{y\in{}^{(m)}W^{(k)}\mid \text{not } L\vdash\neg{}^{*}y\}\ (\subseteq{}^{(m)}W^{(k)})\ (m=1,2,\ldots;k=0,1,\ldots)$†

[Theorem 6] $L\geqslant K_1$ なる論理 L について、任意の論理式$A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して,

$\underline{L\vdash A\ \Leftrightarrow\ {}^{(m)}W^{(k)}{}_L\subseteq{}^{(m)}W[A]}$ $(m\geqq 1, k\geqq 0)$ (命題論理の性質$\boxed{3}$の拡張)

(Proof) $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$に対し、前定理から$L\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[A])\equiv A$ なので、次の Lemma が示せればよい.

Lemma 6-1 $L\geqslant PL$ なる論理 L について、任意の論理式$A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して,

$\underline{L\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[A])\ \Leftrightarrow\ {}^{(m)}W^{(k)}{}_L\subseteq{}^{(m)}w[A]}$ ……(#) $(m\geqq 1, k\geqq 0)$

「(#の⇐part) ${}^{(m)}W^{(k)}{}_L\subseteq{}^{(m)}w[A]$ を仮定. Prop.2(5)から、$PL\vdash{}^{*}({}^{(m)}W^{(k)}{}_L)\supset{}^{*}({}^{(m)}w[A])$…①
Def. 6 から、$L\vdash{}^{*}({}^{(m)}W^{(k)}-{}^{(m)}W^{(k)}{}_L)\equiv\perp$. 従って$L\vdash{}^{*}({}^{(m)}W^{(k)}{}_L)\equiv{}^{*}({}^{(m)}W^{(k)})$. そこで、
Theorem 3 から、$L\vdash{}^{*}({}^{(m)}W^{(k)}{}_L)$ …②. 従って、①,②から、$L\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[A])$.
(#の⇒part) $L\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[A])$ …③ かつ ${}^{(m)}W^{(k)}{}_L\not\subseteq{}^{(m)}w[A]$を仮定し、矛盾を導く.
$\exists f_0(f_0\in{}^{(m)}W^{(k)}{}_L\ \&\ f_0\notin{}^{(m)}w[A])$. 従って、not $L\vdash\neg{}^{*}f_0$…④ かつ$\{f_0\}\cap{}^{(m)}w[A]=\varnothing$. 故に、
$PL\vdash\neg({}^{*}f_0\wedge{}^{*}({}^{(m)}w[A]))$. $PL\vdash{}^{*}({}^{(m)}w[A])\supset\neg{}^{*}f_0$. 故に、③から$L\vdash\neg{}^{*}f_0$…⑤. ④と矛盾.」

[註]†) $\underline{{}^{(m)}w[A]\cap{}^{(m)}W^{(k)}{}_L}=\boxed{{}^{(m)}w_L[A]}$(A($\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$)のLでの展開集合)とおけば、$\underline{L\vdash{}^{*}({}^{(m)}w_L[A])\equiv A}$,
$\underline{L\vdash A\ \Leftrightarrow\ {}^{(m)}w_L[A]={}^{(m)}W^{(k)}{}_L}$ も成立する.

「Lの決定問題」は Theorem 6 から、2つの有限集合①Lの特性集合 ${}^{(m)}W^{(k)}{}_L$ と②${}^{(m)}w[A]$ の双方が、「(要素すべての)リスト作成可能」(「特定化可能」とよぶ)となることで肯定される. ②の「${}^{(m)}w[A]$ の特定化可能性」は、「${}^{(m)}W^{(k)}$の特定化可能性(${}^{(m)}W^{(k)}$ の帰納的定義からいえる)と、Aの構成に関する帰納法」でいえる. そこで,「①の ${}^{(m)}W^{(k)}{}_L(m\geqq 1,k\geqq 0)$自身が特定化可能な集合で表現される」とき、Lは決定可能となる. この集合表現をLの特定化集合という.

「L＝$\boxed{K^{\sim}\text{(同次制限 normal logic)}}$ の場合、特性集合 ${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$ は次の Theorem 8 から集合 ${}^{(m)}R^{(k)}$ で表現可能($m\geqq1,k\geqq0$). Proposition 7 から特定化可能. 従って $\boxed{K^{\sim}\text{は決定可能}}$ である」

(Notation 7)　$f\in{}^{(m)}W^{(k+1)}$,　$2^{{}^{(m)}W^{(k)}}=\{S_1,\cdots,S_{N(m,k)}\}$ に対して、

$$f=\left\langle g,\ \left(\begin{matrix} K_1[S_1]^{\delta_{11}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots K_1[S_{N(m,k)}]^{\delta_{1N(m,k)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_i[S_1]^{\delta_{i1}}\cdots K_i[S_j]^{\delta_{ij}}\cdots K_i[S_{N(m,k)}]^{\delta_{iN(m,k)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_n[S_1]^{\delta_{n1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots K_n[S_{N(m,k)}]^{\delta_{nN(m,k)}} \end{matrix}\right)\right\rangle,\quad g\in{}^{(m)}W^{(k)},\ \delta_{ij}\in\{0,1\},\ (1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq N(m,k)),$$

とかけるが、

f は g と $k+1$ 次 matrix〔$n\times N(m,k)$ 個のリテラルの積(・は交換則が成立)〕の対 故、次の記法が可能.
$f=\langle g,\ [\Pi_{1\leqq i\leqq n\,\&\,1\leqq j\leqq N(m,k)}K_i[S_j]^{\delta_{ij}}]\rangle$、更に $\{S_1,\cdots,S_{N(m,k)}\}$ は ${}^{(m)}W^{(k)}$ の部分集合の全体故、
$f=\langle g,\ [\Pi_{1\leqq i\leqq n\,\&\,Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}}K_i[Y]^{\delta_{iY}}]\rangle$ のように書くことができる. そこで更に、$\boxed{g='f}$ とかき、
(f の $k+1$ 次 matrix の i 行目 subset Y に対する $K_i[Y]$ の指数: δ_{iY}) を $\boxed{{}^{(m,k+1)}\delta^f{}_{iY}}$ とかく($\boxed{\delta^f{}_{iY}\text{と略記}}$).

(Definition 8) 集合列 ${}^{(m)}R^{(k)}$ ($m\geqq1\ k\geqq0$) の (k-inducive) な定義:　${}^{(m)}R^{(0)}={}^{(m)}W^{(0)}$　;

$${}^{(m)}R^{(k+1)}=\{y\in{}^{(m)}W^{(k+1)}\mid 'y\in{}^{(m)}R^{(k)}\ \&\ \forall_{i(1\leqq i\leqq n)}\exists_{X\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}}(\forall_Y(X\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^y{}_{iY}}=1)\ \&\ \forall_Y(X\not\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^y{}_{iY}}=0))\}\quad(k\geqq0)$$

$$[=\{y\in{}^{(m)}W^{(k+1)}\mid 'y\in{}^{(m)}R^{(k)}\ \&\ \exists_{X_i\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}\ (i=1,\ldots,n)}\forall_{i(1\leqq i\leqq n)}(\forall_Y(X_i\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^y{}_{iY}}=1)\ \&\ \forall_Y(X_i\not\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^y{}_{iY}}=0))\}\quad(k\geqq0)]$$

(Proposition 7) ${}^{(m)}R^{(k)}$ ($m\geqq1,\ k\geqq0$) は特定化可能である.

(Proof) ${}^{(m)}W^{(k)}$ ($m\geqq1,\ k\geqq0$) の特定化可能性 と 集合列 ${}^{(m)}R^{(k)}$ ($m\geqq1,\ k\geqq0$) の定義からいえる.

[Theorem 8]　${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}={}^{(m)}R^{(k)}$　($m\geqq1,\ k\geqq0$)

(Proof) 次の２つの Lemma を用いる.

Lemma 8-1：任意の $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ に対して、$K^{\sim}\vdash A\ \Rightarrow\ {}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}w[A]$　($m\geqq1,\ k\geqq0$)

Lemma 8-2：${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}$　($m\geqq1,\ k\geqq0$)

Theorem 6 の証明の②までのプロセスと同様に、$K^{\sim}\vdash{}^{*(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$ が成立. Lemma 8-1 から $K^{\sim}\vdash{}^{*(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}\Rightarrow{}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}w[{}^{*(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}]$.　Theorem 1 から ${}^{(m)}w[{}^{*(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}]={}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$.
以上から、${}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$.　従って、Lemma 8-2 と併せて ${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}={}^{(m)}R^{(k)}$　.

(Lemma 8-1 の証明) A の証明図の高さ h についての帰納法

(i) h=0: (i) $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$ がトートロジーのとき、${}^{(m)}w[A]={}^{(m)}W^{(k)}$ が示される故、${}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}w[A]$.

(ii) $A:K_{i_0}(B\supset C)\supset(K_{i_0}(B)\supset K_{i_0}(C))$, $deg(B)=deg(C)=k-1$ のとき. 任意の $f\in{}^{(m)}R^{(k)}$ に対し, $\forall_{i(1\leqq i\leqq n)}\exists_{X\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}}(\forall_Y(X\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{iY}}=1)\ \&\ \forall_Y(X\not\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{iY}}=0))$. 特に、$i=i_0$ の場合、ある X_0 があり、$\forall_Y(X_0\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{i_0Y}}=1)\ \&\ \forall_Y(X_0\not\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{i_0Y}}=0)\cdots$(※). 一方 X_0 に関し、
(case1) $X_0\not\subseteq{}^{(m)}w[B]^C\cup{}^{(m)}w[C](={}^{(m)}w[B\supset C])$ or (case2) $X_0\not\subseteq{}^{(m)}w[B]$ or (case3) $X_0\subseteq{}^{(m)}w[C]$ が成立.

(※)から (case1) $\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{i_0\,{}^{(m)}w[B\supset C]}}=0$　$\Rightarrow f\in{}^{(m)}w[K_{i_0}(B\supset C)]^C\subseteq{}^{(m)}w[K_{i_0}(B\supset C)\supset(K_{i_0}(B)\supset K_{i_0}(C))]$

(case2) $\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{i_0\,{}^{(m)}w[B]}}=0$　$\Rightarrow f\in{}^{(m)}w[K_{i_0}(B)]^C\subseteq{}^{(m)}w[K_{i_0}(B\supset C)\supset(K_{i_0}(B)\supset K_{i_0}(C))]$

(case3) $\Rightarrow\underline{\delta^f{}_{i_0\,{}^{(m)}w[C]}}=1$　$\Rightarrow f\in{}^{(m)}w[K_{i_0}(C)]\subseteq{}^{(m)}w[K_{i_0}(B\supset C)\supset(K_{i_0}(B)\supset K_{i_0}(C))]$.

以上から、$f\in{}^{(m)}R^{(k)}\ \Rightarrow\ f\in{}^{(m)}w[K_{i_0}(B\supset C)\supset(K_{i_0}(B)\supset K_{i_0}(C))]$.　従って、${}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}w[A]$

(2)h>0 : (i) $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$の最下の推論が m.p. $\dfrac{B \quad B\supset A}{A}$ (deg(B)=d, deg(A)＝k)のとき．max(d,k)＝r とする． 帰納法の仮定から、 ${}^{(m)}R^{(d)}\subseteq{}^{(m)}w[B]$ …①

${}^{(m)}R^{(r)}\subseteq{}^{(m)}w[B\supset A]=({}^{(m)}W^{(r)}-{}^{(m)}w[B]\overset{r-d}{'\cdots'})\cup{}^{(m)}w[A]\overset{r-k}{'\cdots'}$ …②． ①から、

${}^{(m)}R^{(r)}={}^{(m)}R^{(d)}\overset{r-d}{'\cdots'}\subseteq{}^{(m)}w[B]\overset{r-d}{'\cdots'}$ …①'． ②と①' から、${}^{(m)}R^{(r)}\subseteq{}^{(m)}w[A]\overset{r-k}{'\cdots'}$． 従って、

${}^{(m)}R^{(k)}=\overset{r-k}{'\cdots'}{}^{(m)}R^{(r)}\subseteq\overset{r-k}{'\cdots'}({}^{(m)}w[A]\overset{r-k}{'\cdots'})={}^{(m)}w[A]$．

(ii) $A\in{}^{(m)}\mathcal{L}^{(k)}$の証明の最下の推論が次の Ki_0 推論のとき $\dfrac{B}{Ki_0(B)}$ ，但し$A=Ki_0(B)$

帰納法の仮定から、${}^{(m)}R^{(k-1)}\subseteq{}^{(m)}w[B]$ …($)

任意の$f\in{}^{(m)}R^{(k)}$に対し、($)から、$\underline{\delta^{f}{}_{i_0\,{}^{(m)}w[B]}}=1$．故に、$f\in{}^{(m)}w[Ki_0(B)]$．故に、${}^{(m)}R^{(k)}\subseteq{}^{(m)}w[A]$．

<u>(Lemma 8-2 の証明)</u> k に関する帰納法による．(1)初期ステップは明らか．

(2)帰納ステップ: ${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}$ …(H0)と${}^{(m)}W^{(k+1)}{}_{K^{\sim}}\not\subseteq{}^{(m)}R^{(k+1)}$ …(H1)から矛盾を導く．

(H1)から、「$f_0\in{}^{(m)}W^{(k+1)}{}_{K^{\sim}}$ …(H11) かつ $f_0\notin{}^{(m)}R^{(k+1)}$… (H12)」なる f_0 が存在する．

(H12)は次の 2 つの場合に分かれる．

(case1) $'f_0\notin{}^{(m)}R^{(k)}$: 帰納法の仮定(H0)から、$'f_0\notin{}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$．従って、$K^{\sim}\vdash\neg{}^{*}('f_0)$．故に、$K^{\sim}\vdash\neg{}^{*}f_0$．従って、 $f_0\notin{}^{(m)}W^{(k+1)}{}_{K^{\sim}}$．(H11)に反し矛盾．

(case2) $\exists i_0\underline{(1\leqq i_0\leqq n)}\,\forall\underline{X\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}}\,(\exists_Y(X\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\&\,\underline{\delta^{f_0}{}_{i_0\,Y}}=0)$ or $\exists_V(X\not\subseteq V\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\&\,\underline{\delta^{f_0}{}_{i_0\,V}}=1))$ …(※)． case2 では、「帰納法の仮定(H0) ${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}$, および(H11), (H12)の下で、次の(†)が示される．

$$\left.\begin{array}{l}(\emptyset\neq S\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}})\,\&\,(K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}S^{(m,k)}))\ (\dagger 1)\\ \Rightarrow\exists_Z((\emptyset\neq Z\subset S)\,\&\,(K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}Z^{(m,k)}))\ (\dagger 2)\end{array}\right]\ (\dagger)$$
」

一方、$X_0={}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$について、$K^{\sim}\vdash{}^{*}X_0$．従って、Prop. 0(2)より $K^{\sim}\vdash{}^{*}(X_0)^{(m,k)}$．$(\emptyset\neq X_0\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}})\,\&\,(K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}(X_0)^{(m,k)})$．従って、(†)を繰り返し適用することによって、$X_0\supset X_1\supset X_2\supset\cdots$なる(有限集合の)無限真部分列が生じ、矛盾をきたす．

<u>(†)の証明</u>：(†1)の前半$S\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$と帰納法の仮定${}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}$から、$S\subseteq{}^{(m)}R^{(k)}$．故に(※)から、$\exists_Y(S\subseteq Y\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\ \&\ \underline{\delta^{f_0}{}_{i_0 Y}}=0)$…(※1) or $\exists_V(S\not\subseteq V\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\ \&\ \underline{\delta^{f_0}{}_{i_0 V}}=1)$…(※2)

(※1)の場合、$PL\vdash{}^{*}f_0\supset\neg Ki_0({}^{*}Y^{(m,k)})$．また$S\subseteq Y$, Prop. 2(5) ,0(2)から $PL\vdash{}^{*}S^{(m,k)}\supset{}^{*}Y^{(m,k)}$．Prop. 0(1) から $deg({}^{*}S^{(m,k)})=deg({}^{*}Y^{(m,k)})$． 従って、$K^{\sim}\vdash Ki_0({}^{*}S^{(m,k)})\supset Ki_0({}^{*}Y^{(m,k)})$．故に、$K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset\neg Ki_0({}^{*}S^{(m,k)})$．(†1)の後半と併せれば(H11)に反す．故に<u>(※2)の方が成立</u>． 従って、$PL\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}V^{(m,k)})$．(†1)の後半と併せて、$K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}S^{(m,k)}\wedge{}^{*}V^{(m,k)})$．Prop.0(2),2(4) より、$PL\vdash({}^{*}S^{(m,k)}\wedge{}^{*}V^{(m,k)})\supset{}^{*}(S\cap V)^{(m,k)}$がいえるので、$K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}(S\cap V)^{(m,k)})$．また$S\not\subseteq V$故、$S\cap V=Z$ とおけば、$Z\subset S\ \&\ K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset Ki_0({}^{*}Z^{(m,k)})$①．更に、$\underline{Z\neq\emptyset}$がいえるので、(†2)成立．

[<u>①と$Z=\emptyset$ を仮定する</u>、(※) から、 $(\exists_T(\emptyset\subseteq T\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\ \&\ \underline{\delta^{f_0}{}_{i_0\,T}}=0)$ or $\exists_U(\emptyset\not\subseteq U\subseteq{}^{(m)}W^{(k)}\ \underline{\delta^{f_0}{}_{i_0\,U}}=1))$． 後半は成立しないので、前半が成立: $Z=\emptyset\subseteq T\ \&$ $PL\vdash{}^{*}f_0\supset\neg Ki_0({}^{*}T^{(m,k)})$．$Z\subseteq T$ から、$K^{\sim}\vdash Ki_0({}^{*}Z^{(m,k)})\supset Ki_0({}^{*}T^{(m,k)})$．故に $K^{\sim}\vdash{}^{*}f_0\supset\neg Ki_0({}^{*}Z^{(m,k)})$②．①,②から $K^{\sim}\vdash\neg{}^{*}f_0$．従って $f_0\notin{}^{(m)}W^{(k+1)}{}_{K^{\sim}}$ ． これは (H11) に反する.]

[IV] K~ または K~ より強い論理に有効な基礎集合の最小項の形と標準形展開の方向性

標準形展開に用いる最小項は、$L\geqslant K^{\sim}$ なる論理 L を扱う場合、前記 ${}^{(m)}R^{(k)}={}^{(m)}W^{(k)}{}_{K^{\sim}}$ の形に絞りこんだもののみを基礎集合として用いれば十分である．(Def.8)によるこの${}^{(m)}R^{(k)}$ の定義は

${}^{(m)}R^{(0)} = {}^{(m)}W^{(0)}$; ${}^{(m)}R^{(k+1)} = \{< x, [\Pi_{1\leq i\leq n}(\Pi_{X_i\subseteq \underline{Y}\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[\underline{Y}]^1 \cdot \Pi_{X_i\not\subseteq \underline{Y}\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[\underline{Y}]^0)\ ] >|$ $x \in {}^{(m)}R^{(k)}, X_i \subseteq {}^{(m)}R^{(k)}\ (1\leq i\leq n)\ \}$とかくことができる.

更にこれについて、 $K_i\langle\!\langle X_i\rangle\!\rangle = \Pi_{X_i\subseteq \underline{Y}\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[\underline{Y}]^1 \cdot \Pi_{X_i\not\subseteq \underline{Y}\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[\underline{Y}]^0$と置くことにすれば、

$${}^{(m)}R^{(k+1)} = \{< x\ , \left[\begin{array}{c} K_1\langle\!\langle X_1\rangle\!\rangle \\ : \\ K_n\langle\!\langle X_n\rangle\!\rangle \end{array}\right] >|\ \ x \in {}^{(m)}R^{(k)}, X_i \subseteq {}^{(m)}R^{(k)}\ (1\leq i\leq n)\ \}$$とかける.

また、${}^{(m)}w[K_i(B)] \cap {}^{(m)}R^{(k+1)}$

$$= \{< x\ , \left[\begin{array}{c} K_1\langle\!\langle X_1\rangle\!\rangle \\ : \\ K_n\langle\!\langle X_n\rangle\!\rangle \end{array}\right] >|\ \ x \in {}^{(m)}R^{(k)}, X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n \subseteq {}^{(m)}R^{(k)}, \underline{X_i \subseteq {}^{(m)}w[B]}\ \}$$

となることを確かめ得る.

更に $K^{\sim}$の公理の支援を考慮すれば、$\underline{K_i\langle\!\langle X_i\rangle\!\rangle} = K_i[X_i\ ]^1 \cdot \Pi_{X_i\not\subseteq \underline{Y}\subseteq {}^{(m)}R^{(k)}} K_i[\underline{Y}]^0$とおき得る.
関連して、定義 Def.2(4)を「$\underline{f} = \langle \underline{g\cdot [\Pi_{1\leq i\leq n} K_i\langle\!\langle S_i\rangle\!\rangle]}\rangle$ ($g \in {}^{(m)}R^{(k)}$, $S_i \subseteq {}^{(m)}R^{(k)}$ $(1\leq i\leq n)$)に対し、$\underline{{}^*f = {}^*g \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq n}(K_i({}^*(S_i)^{(m,k)}) \wedge \bigwedge_{S_i\not\subseteq Y\subseteq {}^{(m)}R^{(k)}} \neg K_i({}^*(Y)^{(m,k)}))}$」とし、Def.2-4 の中の ${}^{(m)}W^{(k)}$を${}^{(m)}R^{(k)}$に代えれば、$L \geqslant K^{\sim}$なる論理 L について、標準形展開や決定問題は扱いやすくなる. これらの結果は文献[2]- [3]にある. ただし、その文献では、記号$\underline{{}^{(m)}R^{(k)}}$, $\underline{K_i\langle\!\langle X_i\rangle\!\rangle}$ 自身に $\underline{{}^{(m)}W^{(k)}}$, $\underline{K_i[X_i\ ]}$を用いている.

References

[1] J.Hintikka: Knowledge and belief, Cornel University Press 1962.

[2] 大芝　猛, 小橋一秀: 知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化, 数理解析研究所考究録, 950, pp189-192, 1996.

[3] 大芝　猛: Multi-modal logics の Shannon type 標準形展開による特性化, 小野勝次先生記念 数理論理研究会, pp55-63, 2002.6

Appendix ([Theorem 1] 任意の $U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$ に対し、${}^{(m)}w[{}^*U] = U$ $(m\geq 1, k\geq 0)$)の証明

(†k) 任意の $f \in {}^{(m)}W^{(k)}$に対し、${}^{(m)}w[{}^*f] = \{f\}$
(∗k) 任意の $U \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$ に対し、${}^{(m)}w[{}^*U] = U$
(%k) 任意の $Y \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}$ に対し、${}^{(m)}w[{}^*(Y)^{(m,k)}] = Y$

について、Def.2−4, Prop.0(1)に注意すれば、$\underline{[a](\dagger k) \Rightarrow (*k)}$, $\underline{[b](*k) \Rightarrow (\%k)}$ の成立を確かめ得る. そこで「任意の$m\geq 1$につき、(†k) $(k\geq 0)$を k に関する帰納法で示す」. $(k=0)$: $f = p_1^{\delta_1}\cdot\cdots\cdot p_m^{\delta_m} \Rightarrow {}^{(m)}w[{}^*f] = {}^{(m)}w[{}^{\delta_1}p_1 \wedge \cdots \wedge {}^{\delta_m}p_m]$ $= {}^{(m)}w[{}^{\delta_1}p_1] \cap \cdots \cap {}^{(m)}w[{}^{\delta_m}p_m]$. 一般に、${}^{(m)}w[{}^{\delta_i}p_i] = \{p_1^{\xi_1}\cdot \ldots \cdot p_{i-1}^{\xi_{i-1}} \cdot p_i^{\delta_i} \cdot p_{i+1}^{\xi_{i+1}} \cdot \ldots \cdots \cdot p_m^{\xi_m} \mid \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_m \in \{0,1\}\}$が成立するので、${}^{(m)}w[{}^*f] = \{p_1^{\delta_1}\cdot\cdots\cdot p_m^{\delta_m}\} = \{f\}$.
$(k>0)$: $f = \langle \underline{g, [\Pi_{1\leq i\leq n \& X\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[X]^{\delta_{iX}}]}\rangle$ $(\in {}^{(m)}W^{(k+1)})$, $g \in {}^{(m)}W^{(k)}$, $\delta_{iX} \in \{0,1\}(1\leq i\leq n, X \subseteq {}^{(m)}W^{(k)})$に対し、${}^{(m)}w[{}^*f] = {}^{(m)}w[{}^*g]' \cap \bigcap_{1\leq i\leq n \& X\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} {}^{(m)}w[{}^{\delta_{iX}}K_i({}^*X^{(m,k)})]$. 故に、帰納法の仮定より、${}^{(m)}w[{}^*g]' = \{g\}'$ 故、${}^{(m)}w[{}^*g] = \{\langle \underline{g, [\Pi_{1\leq j\leq n \& Y\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_j[Y]^{\xi_{jY}}]}\rangle \mid \xi_{jY} \in \{0,1\}(1\leq j\leq n, Y \subseteq {}^{(m)}W^{(k)})\}$.
また、${}^{(m)}w[{}^{\delta_{iX}}K_i({}^*X^{(m,k)})] = \{\ \langle \underline{y, [(\Pi_{1\leq j\leq n \& Y\subseteq {}^{(m)}W^{(k)} \& (j,Y)\neq(i, {}^{(m)}w[{}^*X^{(m,k)}])} K_j[Y]^{\xi_{jY}})}$ $\underline{\cdot K_i[{}^{(m)}w[{}^*X^{(m,k)}]]^{\delta_{iX}}\ ]}\rangle \mid y \in {}^{(m)}W^{(k)}, \xi_{jY} \in \{0,1\}\ (1\leq j\leq n, Y \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}, (j,Y) \neq (i, \underline{{}^{(m)}w[{}^*X^{(m,k)}]}))\}$.
帰納法の仮定と[a], [b]から、$\underline{{}^{(m)}w[{}^*X^{(m,k)}]} = \underline{X}$故、${}^{(m)}w[{}^*f] = \{\ \langle \underline{g, [\Pi_{1\leq i\leq n \& X\subseteq {}^{(m)}W^{(k)}} K_i[X]^{\delta_{iX}}]}\rangle\ \}$ $= \{f\}$. 故に(†k+1)成立. 以上から (†k) $(k\geq 0)$が成立. 従って [a]から (∗k) $(k\geq 0)$が成立.